5. POVRŠINSKI INTEGRAL PRVE VRSTE

PREGLED TEORIJE

5.1. Neka je S ograničeni komad po dijelovima glatke površi čiji je rub po dijelovima glatka kriva C. Ako je $S=\bigcup_{i=1}^{n} S_i$, pri čemu su S_i glatki komadi od S koji imaju po dijelovima glatke rubove C_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, a svaka dva komada imaju zajedničke eventualno samo rubne tačke, tada se $S_1, \ldots, S_n$ zove podjela površinske oblasti S.

Ako na svakom komadu S_i odaberemo neku tačku T_i, pa u toj tački postavimo tangentnu ravan na S i komad S_i projiciramo normalno na tu ravan, dobićemo ravnu oblast S_i' organičenu po dijelovima glatkom krivom C_i'. Zato oblast S_i' ima površinu

$$\Delta S_i = p\left(S_i'\right) \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Formirajmo sumu

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i. \tag{2}$$

Ako postoji konačan limes te sume kada $\max d(S_i) \to 0$, tada se kaže da se komad površi S može komplanirati i da ima površinu $p(S)$ jednaku tom limesu. Dakle,

$$p(S) = \lim_{\max d(S_i) \to 0} \sigma_n. \tag{3}$$

5.2. Uz pretpostavke učinjene u tački 5.1. komad površi S može se komplanirati. Ako je taj komad zadan jednačinom

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) \quad ((u, v) \in G) \tag{4}$$

gdje je G ograničena oblast u ravni sa po dijelovima glatkim rubom koja se jednačinom (4) bijektivno preslikava na S, tada vrijedi

$$p(S) = \iint_G \left| \vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}' \right| du dv. \tag{5}$$

U slučaju da se jednačina komada S može napisati u obliku

$$z = z(x, y) \quad ((x, y) \in G) \tag{4'}$$

gdje je G ograničena oblast u Oxy-ravni koja se jednačinom (4′) bijektivno preslikava na S, tada umjesto (5) vrijedi

$$p(S)=\iint_G \sqrt{(z'_x)^2+(z'_y)^2+1}\,dxdy. \tag{5′}$$

Ukoliko je veza (4′) data implicite, tj. u obliku

$$F(x, y, z)=0, \tag{4″}$$

tada uz istu pretpostavku o G vrijedi

$$p(S)=\iint_G \frac{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}}{|F'_z|}\,dxdy. \tag{5″}$$

5.3. Neka je na komadu površi S definisana ograničena funkcija

$$f=f(T)=f(x, y, z) \quad (T(x, y, z)\in S). \tag{6}$$

Za svaku podjelu $S_1, S_2, \ldots, S_n$ oblasti S i svaki izbor tačaka $T_i\in S_i\ (i=1, \ldots, n)$ možemo formirati integralnu sumu

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n} f(T_i)\cdot p(S_i). \tag{7}$$

Ako postoji konačan limes

$$I=\lim_{\max d(S_i)\to 0} \sigma_n, \tag{8}$$

tada se kaže da je funkcija (6) integrabilna na S i piše se

$$I=\iint_S f(T)\,dS. \tag{9}$$

Izraz (9) zove se površinski integral prve vrte funkcije $f(T)$ po površi S.

5.4. Ako je funkcija (6) neprekidna ili po dijelovima neprekidna na S, tada je ona i integrabilna na S. Osim toga, ako je S dato jednačinom (4), odnosno (4′), odnosno (4″), tada uz iste pretpostavke o G kao u 5.2. vrijedi:

$$\iint_S f(T)\,dS=\iint_G f(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v))\,|\vec{r}'_u\times\vec{r}'_v|\,dudv, \tag{10}$$

odnosno

$$\iint_S f(T)\,dS=\iint_G f(x, y, z(x, y))\sqrt{(z'_x)^2+(z'_y)^2+1}\,dxdy, \tag{10′}$$

odnosno

$$\iint_S f(T)\,dS=\iint_G f(x, y, z)\,\frac{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}}{|F'_z|}\,dxdy. \tag{10″}$$

Pri tome pod znakom integrala na desnoj strani relacije (10''), kao i (5''), treba prije integracije umjesto z uvrstiti funkciju $z(x, y)$ dobijenu iz (4'').

Relacije (10), (10') i (10'') pokazuju kako se uz odgovarajuće pretpostavke površinski integral prve vrste po površi S prevodi u dvostruki integral po podesnoj ravnoj oblasti G. Treba napomenuti da ove pretpostavke ne moraju biti ispunjene za samo S, već samo za svaki od nekoliko komada na koje prethodno treba razbiti S. Kako je integral po S jednak sumi integrala po tim komadima, primjenom relacija (10), (10') i (10'') na svaki od tih komada, svodi se i u ovom opštijem slučaju računanje površinskog integrala prve vrste po S na računanje dvostrukih integrala.

5.5. Površinski integral prve vrste ima slične osobine onima koje smo u tački 2.5. naveli za krivolinijski integral prve vrste. Specijalno za funkciju koja na S prima konstantnu vrijednost 1 vrijedi

$$\iint_S dS = p(S). \tag{11}$$

5.6. Površinski integral prve vrste po S može se kao i svi do sada promatrani integrali primijeniti za određivanje ukupne mase, koordinata težišta, momenata i privlačne sile kojom oblast S privlači materijalnu tačku $T_0(x_0, y_0, z_0)$ u kojoj je skoncentrisana masa m_0. Potrebno je samo poznavanje površinske gustoće mase raspoređene po S.

5.7. Površinski integral prve vrste može se kao i kod ostalih integrala definisati i za ograničenu vektorsku funkciju $\vec{F}(T)$ $(T \in S)$. Njegovo izračunavanje i ostale osobine slični su kao u slučaju ostalih integrala vektorske funkcije koje smo već posmatrali.

5.8. Mi smo razmotrili samo svojstveni površinski integral prve vrste. Nesvojstveni površinski integral prve vrste definiše se kao u prethodno razmotrenim slučajevima nesvojstvenih integrala.

Izračunati površinske integrale I vrste:

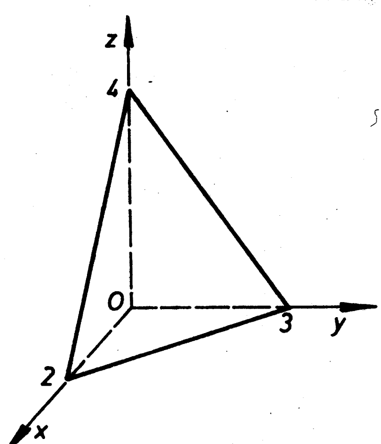
242. $I=\iint\limits_S \left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)dS$, gdje je S dio ravni $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ koji leži u I oktantu.

243. $I=\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS$, gdje je S dio konusne površi $z^2=x^2+y^2$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$.

244. $I=\iint\limits_S |xyz|\,dS$, gdje je S dio površi $z=x^2+y^2\ (z\leqslant 1)$.

245. $I=\iint\limits_S (xy+yz+zx)\,dS$, gdje je S dio konusa $z=\sqrt{x^2+y^2}$ unutar cilindra $x^2+y^2=2ax$.

246. $I=\iint\limits_S \sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\,dS$, gdje je S elipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.



Sl. 68

247. $I=\iint\limits_S z\,dS$, gdje je S dio helikoida: $x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=v$ $(0\leqslant u\leqslant a,\ 0\leqslant v\leqslant 2\pi)$.

Rješenja:

242. $S:\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$, tj.

$$z=4-2x-\frac{4}{3}y.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-2,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{4}{3},$$

pa imamo

$$I=\iint\limits_S\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)dS=$$

$$=\iint\limits_D\left[z(x,y)+2x+\frac{4}{3}y\right]\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_D 4\sqrt{1+4+\frac{16}{9}}\,dxdy=\frac{4\sqrt{61}}{3}\iint\limits_D dxdy=4\frac{\sqrt{61}}{3}\cdot\frac{2\cdot 3}{2}=4\sqrt{61},$$

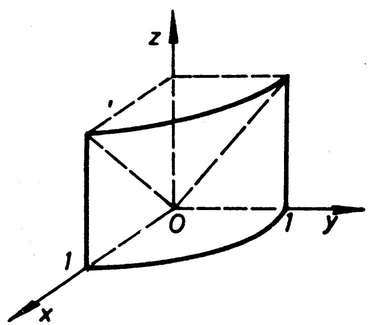
jer je D trougao 023 na sl. 68.

243. $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$I=\iint\limits_S(x^2+y^2)\,dS=\iint\limits_D(x^2+y^2)\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_D(x^2+y^2)\sqrt{2}\,dxdy=\frac{\pi\sqrt{2}}{2},$$

jer je $D: x^2+y^2\leqslant 1$ (sl. 69).



Sl. 69

244. $I=\dfrac{125\sqrt{5}-1}{420}$.

(Pošto funkcija $U=xyz$ ima iste vrijednosti u tačkama površi $z=x^2+y^2$ simetričnim u odnosu na koordinatne ravni, uzeti 4 integrala po dijelu S_1 površi S u I oktantu).

245. $I=\dfrac{64}{15}\sqrt{2}\,a^4$.

(Može se vidjeti da su $\iint\limits_S xydS$ i $\iint\limits_S yzdS$ jednaki nuli, jer je funkcija y neparna funkcija a površ S simetrična u odnosu na ravan $y=0$, pa ostaje da se izračuna $\iint\limits_S zxdS$).

246. Imamo $S: U(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$, tj. grad $U=\dfrac{2x}{a^2}\vec{i}+$

$$+\frac{2y}{b^2}\vec{j}+\frac{2z}{c^2}\vec{k},\ \cos\gamma=\frac{\left|\dfrac{z}{c^2}\right|}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}}.$$

Prema tome,

$$I=\iint_S \sqrt{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)}\frac{dxdy}{|\cos\gamma|}=\iint_S\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dxdy}{\left|\frac{z}{c^2}\right|}=$$

$$=2\iint_D\left[\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\right]\frac{cdxdy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$$

(dolaze 2 integrala jer su integrali po gornjem i donjem dijelu elipsoida isti). Znači,

$$I=2\,abc\iint_{D'}\left[\rho^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)+\frac{1}{c^2}(1-\rho^2)\right]\frac{\rho\,d\rho\,d\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}}=$$

$$=2\,abc\left[\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)d\varphi\int_0^1\frac{\rho^3\,d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}+\frac{1}{c^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right.,$$

tj.

$$I=\frac{4\,abc}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\pi.$$

247. Kako je površ S zadata vektorski (parametarski) $\vec{r}=x(u,\ v)\vec{i}+$ $+y(u,\ v)\vec{j}+z(u,\ v)\vec{k}$, primijenićemo formulu

$$\iint_S F(x,y,z)\,dS=\iint_D F[x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)]\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right|dudv.$$

U našem je slučaju $x=u\cos v,\ \ y=u\sin v,\ \ z=v;$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \cos v&\sin v&0\\ -u\sin v&u\cos v&1\end{vmatrix}=\sin v\,\vec{i}-\cos v\,\vec{j}+u\,\vec{k};$$

$$D:(0\leqslant u\leqslant a,\ \ 0\leqslant v\leqslant 2\pi).$$

Zato je

$$I=\iint_S zdS=\iint_D v\cdot\sqrt{1+u^2}\,dudv=\int_0^{2\pi}vdv\int_0^a\sqrt{1+u^2}\,du=$$

$$=2\pi^2\cdot\left[\frac{1}{2}u\sqrt{1+u^2}+\frac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)\right]_0^a=$$

$$=\pi^2\left[a\sqrt{1+a^2}+\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\right].$$

Izračunati površinu površi S, ako je:

248. S dio površi $z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ između cilindara $x^2+y^2=1$ i $x^2+y^2=$ $=2$ u I oktantu.

249. S dio površi $x^2+y^2+z^2=R^2$ koji se nalazi van cilindra $(x^2+$ $+y^2)^2=R^2(x^2-y^2)$.

250. S dio sfere $x^2+y^2+z^2=a^2$ unutar cilindra $x^2+y^2=ay$.

251. S dio cilindra $x^2=2z$ odsječenog ravnima $x-2y=0$, $y=2x$ i $x=2\sqrt{2}$.

252. S dio površi $y=x^2+z^2$ u I oktantu koji isijeca cilindar $x^2+z^2=1$.

253. S površ torusa $\vec{r}=(a+b\cos\theta)\cos\varphi\,\vec{i}+(a+b\cos\theta)\sin\varphi\,\vec{j}+b\sin\theta\,\vec{k}$.

254. S površ $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2)$.

255. S površ (Vivanijevog) tijela $V=\{(x,\ y,\ z): x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,$ $x^2+y^2\leqslant Rx\}$.

Rješenja:

248. Za površ $z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ imamo

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^2-2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

pa je

$$P=\iint\limits_S dS=\iint\limits_D\sqrt{1+\left[\frac{y^2-2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right]^2+\left[\frac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]^2}\,dxdy,$$

gdje je $D: 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2$.
Uvedimo polarne koordinate: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Imaćemo:

$$P=\iint\limits_D\sqrt{1+\frac{1}{\rho^4}(-\cos 2\varphi-\sin 2\varphi)^2+\frac{1}{\rho^4}(\cos 2\varphi-\sin 2\varphi)^2}\,d\rho\,d\varphi=$$

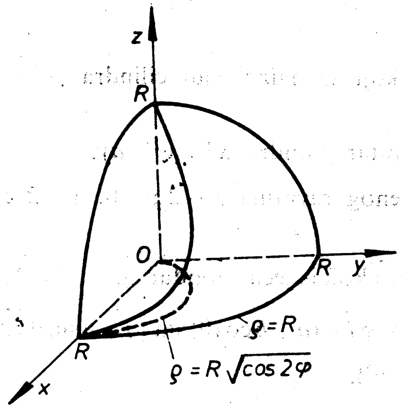
$$=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_1^{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{\rho^4+2}}{\rho^4}\cdot\rho^3\,d\rho=\frac{\pi}{2}\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}}\frac{t^2}{2(t^2-2)}\,dt=$$

$$\left(2+\rho^4=t^2,\quad \rho^3 d=\frac{1}{2}t\,dt\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}}\left(1+\frac{2}{t^2-2}\right)dt=\frac{\pi}{4}\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right)\Bigg|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{6}}=$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\sqrt{6}-\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)\right].$$

249. Površ $S: x^2+y^2+z^2=R^2$ isječena cilindrom $(x^2+y^2)^2=R^2(x^2-y^2)$ simetrična je odnosu na koordinatne ravni (sl. 70), pa je



Sl. 70

$$P=8\iint_{S_1} dS=$$

$$=8\iint_{S_1}\sqrt{1+\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2}\,dxdy=$$

$$=8\iint_{D_1}\frac{R}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}\,dxdy,$$

gdje je S_1 dio površi S u I oktantu. Uvedimo polarne koordinate. Biće

$$P=8R\int_{\pi/4}^{\pi/2}d\varphi\int_0^R\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}+8R\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_{R\sqrt{\cos 2\varphi}}^{R}\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}.$$

$$\left(\text{Može i ovako: } P=8R\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^R\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-\rho^2}}-8R\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_0^{R\sqrt{\cos\varphi}}\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{r^2-\rho^2}}.\right)$$

Dakle, $P=8R\int_0^{\pi/4}\left[-\sqrt{R^2-\rho^2}\right]_{R\sqrt{\cos 2\varphi}}^{R}d\varphi+8R\cdot\frac{\pi}{4}\left[-\sqrt{R^2-\rho^2}\right]_0^R.$

tj. $P=R^2(8\sqrt{2}-8+2\pi)$.

250. $P=4a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$.

251. $P=13$.

252. $P=\frac{(5\sqrt{5}-1)}{24}$.

253. $P=4ab\pi^2$ $\left(\text{Uzeti } P=\iint_S dS=\iint_D\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right|d\varphi\,d\theta;\right.$

$$\left.D:\ 0<\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.\right)$$

254. Smjenom $x=\rho\cos\varphi\sin\theta$, $y=\rho\sin\varphi\sin\theta$, $z=\rho\cos\theta$ dobija se jednačina $\rho=a\sin\theta$. Uvrštavajući ovu vrijednost $\rho=\rho(\varphi,\theta)$ u jednačine

$x = x(\rho, \varphi, \theta)$, $y = y(\rho, \varphi, \theta)$, $z = z(\rho, \varphi, \theta)$ dobijaju se parametarske jednačine površi

$$x = a \sin^2 \theta \cos \varphi = x(\varphi, \theta)$$

$$y = a \sin^2 \theta \sin \varphi = y(\varphi, \theta)$$

$$z = \frac{a}{2} \sin 2\theta \quad = z(\varphi, \theta).$$

Za izračunavanje površine koristićemo vezu

$$\iint_S dS = \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, d\varphi\, d\theta, \text{ pri čemu je}$$

$$A = \frac{D(y, z)}{D(\varphi, \theta)}, \quad B = \frac{D(z, x)}{D(\varphi, \theta)}, \quad C = \frac{D(x, y)}{D(\varphi, \theta)}.$$

Biće:

$$A = a^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \cos 2\theta$$

$$B = a^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \cos 2\theta$$

$$C = -2 a^2 \cos \theta \sin^3 \theta$$

i zatim

$$A^2 + B^2 + C^2 = a^4 \sin^4 \theta, \quad \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = a^2 \sin^2 \theta.$$

Sada je

$$P = a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2 \theta\, d\theta = 2\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^2 \theta\, d\theta = \pi^2 a^2.$$

255. Tijelo je simetrično u odnosu na ravan $z = 0$, pa je $P = 2P_S + 2P_C$, pri čemu je P_S površina gornjeg dijela sfere, a P_C površina gornjeg dijela cilindra. Biće

$$P_S = \iint_{S'} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dxdy = R \iint_{S'} \frac{dxdy}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}}.$$

Oblast S' je krug $x^2 + y^2 \leqslant Rx$. Uvodeći polarne koordinate dobija se

$$P_S = R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R\cos\varphi} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = 2R^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Površinu cilindra tražimo pomoću krivolinijkog integrala: $P_C = \int_l z ds$, pri čemu je l kružnica $x^2 + y^2 = Rx$, a $z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} = \sqrt{R^2 - Rx}$.

Ako jednačinu kružnice l napišemo u parametarskom obliku

$x=\dfrac{R}{2}(1-\cos\varphi),\;\; y=\dfrac{R}{2}\sin\varphi$, dobiće se $ds=\dfrac{R}{2}\,d\varphi,\;\; \varphi\in(0,\,2\pi)$, i zatim

$$P_C=\frac{R}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{R^2-\frac{R^2}{2}(1+\cos\varphi)}\,d\varphi=\frac{R^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=\frac{R^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\varphi}\,d\varphi=\frac{R^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}|\sin\varphi|\,d\varphi=$$

$$=\frac{R^2}{2}\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi-\frac{R^2}{2}\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi=2\,R^2.$$

Slijedi

$$P=2\,R^2.$$

Izračunati masu raspoređenu na površi S, ako je:

256. S dio površi $x^2+y^2+2\,az=a^2$ u I oktantu, a gustoća mase

$$\rho=\frac{x^3+y^3+az^2}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}.$$

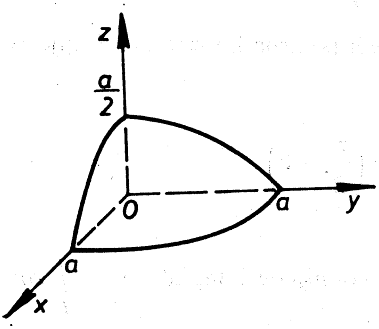
257. S dio površi $x^2+z^2=2\,az\;(a>0)$ koju izrezuje površ $z=\sqrt{x^2+y^2}$, a gustoća $\rho=z$.

258. S sfera $x^2+y^2+z^2=R^2$, a površinska gustoća u svakoj tački jednaka rastojanju te tačke od z-ose.

259. S dio cilindra $x^2+y^2=R^2$ između ravni $z=0$ i $z=h\,(h>0)$, a gustina ρ obrnuto proporcionalna

a) rastojanju tačke od ishodišta,

b) kvadratu rastojanja tačke od ishodišta.



Sl. 71

Rješenja:

256. S je dio paraboloida $x^2+y^2+2\,az=a^2$ (sl. 71) i ima masu

$$M=\iint_S \rho(x,y,z)\,dS=\iint_S \frac{x^3+y^3+az^2}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{a}\right)^2+\left(\frac{-y}{a}\right)^2}\,dxdy=$$

$$=\frac{1}{a}\iint_D\left[x^3+y^3+a\left(\frac{a^2-x^2-y^2}{2a}\right)^2\right]dxdy=$$

$$=\frac{1}{a}\iint_{D'}\left[\rho^3(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)+\frac{1}{4a}(a^2-\rho^2)^2\right]\rho\,d\rho\,d\varphi=$$

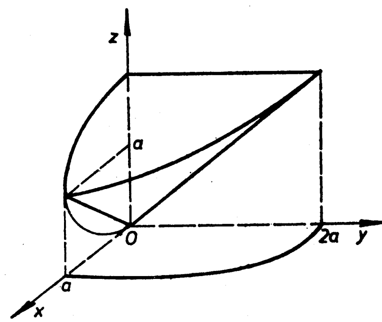
$$=\frac{1}{a}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)\,d\varphi\int_0^a\rho^4\,d\rho+\frac{1}{4a}\int_0^a(a^2\rho-\rho^3)^2\,d\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi,\right.$$

tj. $M=a^4\left(\frac{4}{15}+\frac{\pi}{48}\right)$.

257. $M=\iint_S z\,dS=$

$$=\iint_D\left(a+\sqrt{a^2-x^2}\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\,dxdy=$$

$$=\iint_D\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+a\right)dxdy,\text{ gdje je}$$



Sl. 72

$$D: 2x^2+y^2\leqslant 2a\sqrt{x^2+y^2},\text{ tj.}$$

$$D': \rho\leqslant\frac{2a}{1+\cos^2\varphi}.$$

Dakle, zbog simetrije oblasti D (sl. 72) i podintegralne funkcije u odnosu na x i y,

$$M=4\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\frac{2a}{1+\cos^2\varphi}}\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2-\rho^2\cos^2\varphi}}+a\right)\cdot\rho\,d\rho=$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{a^2}{\cos^2\varphi}\sqrt{a^2-\rho^2\cos^2\varphi}+\frac{a\rho^2}{2}\right]_0^{\frac{2a}{1+\cos^2\varphi}}d\varphi=$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{a^2}{\cos^2\varphi}\sqrt{a^2-\frac{4a^2\cos^2\varphi}{(1+\cos^2\varphi)^2}}+\frac{a^3}{\cos^2\varphi}+\frac{2a^3}{(1+\cos^2\varphi)^2}\right]d\varphi=$$

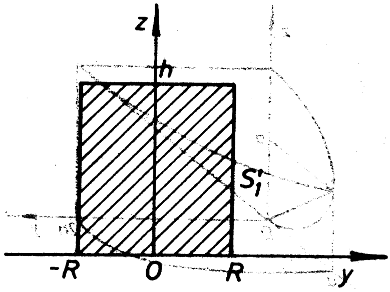
$$=8a^3\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{1+\cos^2\varphi}+\frac{1}{(1+\cos^2\varphi)^2}\right]d\varphi.$$

Smjena $\operatorname{tg}\varphi = t$ $\left(d\varphi = \dfrac{1}{1+t^2}\,dt,\ \cos^2\varphi = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\right)$ daje

$$M = 8\,a^3\left[\int_0^\infty \frac{dt}{2+t^2} + \int_0^\infty \frac{1+t^2}{(2+t^2)^2}\,dt\right] =$$

$$= 8\,a^3\left[\int_0^\infty \frac{dt}{2+t^2} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{2+t^2} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{t^2}{(2+t^2)^2}\,dt\right] =$$

$$= 8\,a^3\left[\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{-t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^\infty,$$



Sl. 73

tj.

$$M = 8\,a^3\left[\frac{3}{2\sqrt{2}}\,\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\,\frac{\pi}{2}\right] = \frac{7\,a^3\,\pi}{\sqrt{2}}.$$

258. $M = \dfrac{8}{3}\pi R^4.$

259. a) Kako je $\rho = \dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \dfrac{k}{\sqrt{R^2+z^2}}$, to je

$$m = k\iint_S \frac{dS}{\sqrt{R^2+z^2}} = 2\,k\iint_{S_1} \frac{dS}{\sqrt{R^2+z^2}},$$

pri čemu je S_1 polovina cilindra koja se na ravan yOz projektuje na pravougaonik S_1' osnovice $2\,R$ i visine h (sl. 73). Koristeći jednakost

$$\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2+y^2}}$$

dobija se

$$m = 2\,kR\iint_{S_1'} \frac{dydz}{\sqrt{R^2+z^2}\sqrt{R^2-y^2}} = 2\,kR\int_0^h \frac{dz}{\sqrt{R^2+z^2}}\int_{-R}^R \frac{dy}{\sqrt{R^2-y^2}} =$$

$$= 2\,k\,R\int_0^h \frac{dz}{\sqrt{R^2+z^2}}\operatorname{arc\,sin}\frac{y}{R}\Bigg|_{-R}^{R} = 2\,k\,\pi\,R\int_0^h \frac{dz}{\sqrt{R^2+z^2}} =$$

$$= 2\,k\,\pi\,R\ln\left|\left(\frac{z}{R}\right) + \sqrt{\left(\frac{z}{R}\right)^2+1}\right|\Bigg|_0^h = 2\,k\,\pi\,R\ln\left(\frac{h+\sqrt{h^2+R^2}}{R}\right).$$

b) $m = k \iint\limits_S \frac{dS}{x^2+y^2+z^2} = k \iint\limits_S \frac{dS}{R^2+z^2} = 2k \iint\limits_{S_1} \frac{dS}{R^2+z^2}.$

Opet iz jednačine polovine cilindra $S_1 : x = \sqrt{R^2 - y^2}$ dobija se

$$\sqrt{1+(x_y')^2+(x_z')^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}},$$

pa je

$$m = 2kR \iint\limits_{S_1'} \frac{dydz}{(R^2+z^2)\sqrt{R^2-y^2}} = 2kR \int\limits_{-R}^{R} \frac{dy}{\sqrt{R^2-y^2}} \int\limits_0^h \frac{dz}{R^2+z^2} = 2k\pi \operatorname{arctg} \frac{h}{\pi}.$$

Primjedba. Treba napomenuti da se element površine dS može izraziti kao

$$dS = Rd\varphi\, dz,$$

pri čemu u integraciji $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant h$, pa je

$$m = R \iint\limits_S \rho\, dS = R \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int\limits_0^h \rho\, dz = 2\pi R \int\limits_0^h \rho\, dz.$$

Odrediti težište površi S, ako je:

260. S dio homogene površi $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant a)$.

261. S gornja polusfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, a površinska gustoća u svakoj tački $\rho = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

262. S dio homogene površi $z = 2 - \frac{x^2+y^2}{2}$ iznad xOy-ravni.

Rješenja:

260. Koordinate težišta će biti

$$x_T = \frac{\iint\limits_S x\, dS}{\iint\limits_S dS}, \quad y_T = \frac{\iint\limits_S y\, dS}{\iint\limits_S dS} \quad \text{i} \quad z_T = \frac{\iint\limits_S z\, dS}{\iint\limits_S dS}.$$

Vektor normalne površi S: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ je

$$\vec{N} = \frac{x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}}{a}, \text{ a } \rho = \text{const},$$

pa će biti

$$M=\rho\iint_S dS=a\rho\iint_D\frac{dxdy}{z}=a\rho\iint_D\frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=$$

$$=a\rho\int_0^a dx\int_0^{a-x}\frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=a\rho\int_0^a \arcsin\frac{a-x}{\sqrt{a^2-x^2}}=$$

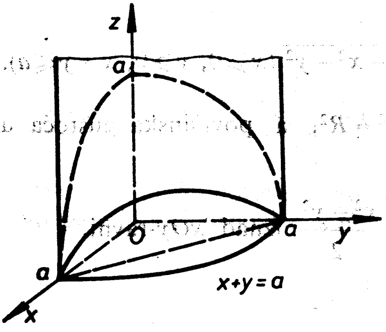
$$=a\rho\left[x\arcsin\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\Bigg|_0^a+\frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^a\sqrt{\frac{x}{a-x}}\,\frac{1}{a+x}\,dx\right].$$

Uvedimo smjenu $\frac{x}{a-x}=t^2\left(x=\frac{at^2}{1+t^2},\ dx=\frac{2at}{(1+t^2)^2}\,dt\right)$. Dobijamo

$$M=\frac{a^2}{\sqrt{2}}\rho\int_0^\infty\frac{2t^2\,dt}{(1+2t^2)(1+t^2)}=a^2\sqrt{2}\left[\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{1+2t^2}\right)dt\right],$$

tj.

$$M=a^2\rho\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1).$$



Sl. 74

Zbog simetrije površi S u odnosu na ravan $x=y$ (sl. 74) biće

$$\iint_S x\rho\,dS=\iint_S y\rho\,dS=$$

$$=a\rho\iint_D\frac{ydxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=$$

$$=a\rho\int_0^a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\Big|_0^{a-x}dx=a\rho\int_0^a(\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{2ax-2x^2})\,dx=$$

$$=a\rho\int_0^a\left(\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}\right)dx=$$

$$=a\rho\left[a^2\frac{\pi}{4}-\sqrt{2}\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi}{2}\right]=\frac{a^3\pi}{4}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Osim toga

$$\iint_S z\rho\, dS = \rho \iint_S z \frac{dxdy}{\frac{z}{a}} = a\rho \iint_D dxdy = \rho\, \frac{a^3}{2}.$$

Prema tome,

$$x_T = y_T = \frac{\rho \frac{a^3 \pi}{4} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)}{\rho a^2 \frac{\pi}{2} \quad (\sqrt{2}-1)} = \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{4},$$

$$z_T = \frac{\rho a^3 \cdot \frac{1}{2}}{\rho a^2 \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)} = \frac{a}{\pi(\sqrt{2}-1)} = \frac{a}{\pi}(\sqrt{2}+1).$$

261. $x_T = y_T = 0, \quad z_T = \frac{3}{8} R.$

262. $x_T = y_T = 0, \ z_T = \frac{307 - 15\sqrt{5}}{310}.$

Izračunati moment inercije površi S u odnosu na z-osu, ako je

263. S dio homogene površi $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \leqslant z \leqslant 1)$.

264. S homogena polusfera $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

265. S dio hiperboličnog paraboloida $z = xy$ za koji je $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R^2$, a površinska gustoća u svakoj tački površi $\rho = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

Rješenja:

263. Momenat inercije u odnosu na z-osu biće

$$I_z = \iint_S (x^2+y^2)\ \rho(x, y, z)\, dS.$$

Sad je

$$z = \sqrt{x^2+y^2}, \ \rho = \text{const}, \text{ pa je}$$

$$I_z = \rho \iint_D (x^2+y^2) \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\, dxdy,$$

gdje je

$$D: x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

Dakle,

$$I_z = \rho\sqrt{2} \iint_D (x^2+y^2)\, dxdy = \rho\sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \cdot \rho\, d\rho, \text{ tj.}$$

$$I_z = \rho\sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \rho \frac{\pi}{2} \sqrt{2}.$$

264. $I_z = \frac{4}{3}\pi a^4.$

265. $I_z = \pi[R\sqrt{R^2+1} + \ln(R+\sqrt{R^2+1}) - \sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})].$

Naći silu kojom površ S privlači tačku mase m, ako je:

266. S homogena sfera, a tačka m na rastojanju a od centra sfere.

267. S homogena bočna površ cilindra osnove radijusa R i visine H, a materijalna tačka m se nalazi u centru osnove.

Rješenja:

266. Uzećemo da se materijalna tačka m nalazi na z-osi u tački $A(0, 0, a)$. Tada će biti

$$F_x = 0, \; F_y = 0, \text{ a } F_z = \gamma\cdot\rho\cdot m\iint\limits_S \frac{(z-a)\,dS}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}},$$

gdje je $\rho = \text{const.}$ gustoća mase na S, a γ gravitaciona konstanta. Napišimo jednačinu sfere S u vektorskom obliku: $\vec{r} = (R\sin\theta\cos\varphi,\ R\sin\theta\sin\varphi,\ R\cos\theta)$.

Tada je $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = R^2\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & 0\\ \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\end{vmatrix} =$

$= R^2(-\sin^2\theta\cos\varphi,\ -\sin^2\theta\sin\varphi,\ -\sin\theta\cos\theta)$, dakle

$$\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right| = R^2\sin\theta.$$

Zato je

$$F_z = \gamma\rho m\iint\limits_D \frac{(R\cos\theta-a)\,R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}{(R^2-2aR\cos\theta+a^2)^{3/2}} =$$

$$= \gamma\rho m\cdot R^2\cdot 2\pi\int\limits_0^\pi \frac{(R^2\cos\theta-a)\sin\theta\,d\theta}{(R^2-2aR\cos\theta+a^2)^{3/2}}.$$

Smjenom $R^2-2aR\cos\theta+a^2 = t^2$ svodi se posljednji integral na

$$F_z = \gamma\rho m\cdot R^2\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2a^2R}\int\limits_{|R-a|}^{R+a}\left(\frac{R^2-a^2}{t^2}-1\right)dt =$$

$$= \gamma\rho m\frac{R}{a^2}\pi\left[\frac{(R^2-a^2)}{|R-a|} - \frac{R^2-a^2}{R+a} - (R+a) + |R-a|\right].$$

Prema tome, za $a<R$ dobijamo $R_z=0$, a za $a>R$,

$$F_z=-\frac{4\pi R^2}{a^2}\gamma\rho\, m.$$

Ako je $a=R$, tada je $F_z=\rho\gamma m\iint\limits_D \frac{R(\cos\theta-1)\,R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{R^3\cdot 2^{3/2}(1-\cos\theta)^{3/2}}=$

$$=-\gamma\rho m\cdot\sqrt{2}\pi\cdot\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\cos\theta}}\,d\theta=-2\pi\gamma\rho\, m.$$

267. Neka je osa cilindra z-osa, a baza cilindra neka se nalazi u xOy-ravni. Tada je materijalna tačka u ishodištu $O\,(0,0,0)$. Zbog simetrije je

$$F_x=F_y=0,\ \text{dok je}\ F_z=\gamma\rho\, m\iint\limits_S\frac{z\, dS}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Kad uvedemo smjenu $x=R\cos\varphi$, $y=R\sin\varphi$, $z=z$, biće

$$F_z=\gamma\, m\,\rho\iint\limits_D\frac{Rz\,d\varphi\, dz}{(R^2+z^2)^{3/2}}=\gamma\rho\, Rm\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{H}\frac{z\, dz}{(R^2+z^2)^{3/2}}=$$

$$=\gamma\rho\, Rm\cdot 2\pi\cdot\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\sqrt{R^2+H^2}}\right).$$